Fórmula general per a qualsevol nombre poligonal

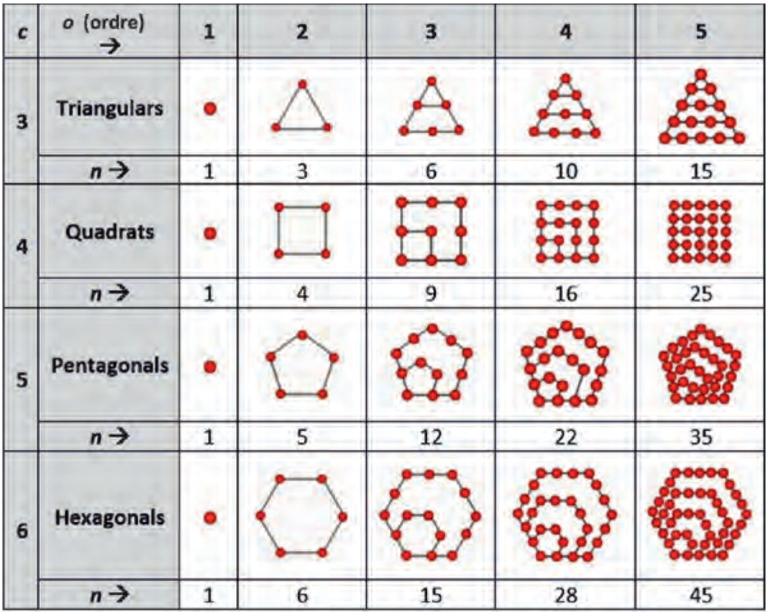
Víctor Conchello Vendrell
Institut Jaume Vicens Vives

Nombre poligonal: Nombre representat com a punts disposats en forma de polígon regular.

Per calcular un nombre poligonal, es fa servir la fórmula següent:

$$n = o\,(2 - o) + \frac{co\,(o-1)}{2},$$

on n és el nombre poligonal, c és el nombre de costats del polígon segons el qual es busca aquest nombre i o és l'ordre:



c	*o* (ordre) →	1	2	3	4	5
3	Triangulars					
	n →	1	3	6	10	15
4	Quadrats					
	n →	1	4	9	16	25
5	Pentagonals					
	n →	1	5	12	22	35
6	Hexagonals					
	n →	1	6	15	28	45

Desenvolupament

Com es pot comprovar, tots els nombres poligonals es poden representar com la suma d'una progressió aritmètica de la qual el primer nombre és 1:

c	o (ordre) →	1	2	3	4	5
3	Triangulars	1	1 + 2	1 + 2 + 3	1 + 2 + 3 + 4	1 + 2 + 3 + 4 + 5
	n →	1	3	6	10	15
4	Quadrats	1	1 + 3	1 + 3 + 5	1 + 3 + 5 + 7	1 + 3 + 5 + 7 + 9
	n →	1	4	9	16	25
5	Pentagonals	1	1 + 4	1 + 4 + 7	1 + 4 + 7 + 10	1 + 4 + 7 + 10 + 13
	n →	1	5	12	22	35
6	Hexagonals	1	1 + 5	1 + 5 + 9	1 + 5 + 9 + 13	1 + 5 + 9 + 13 + 17
	n →	1	6	15	28	45

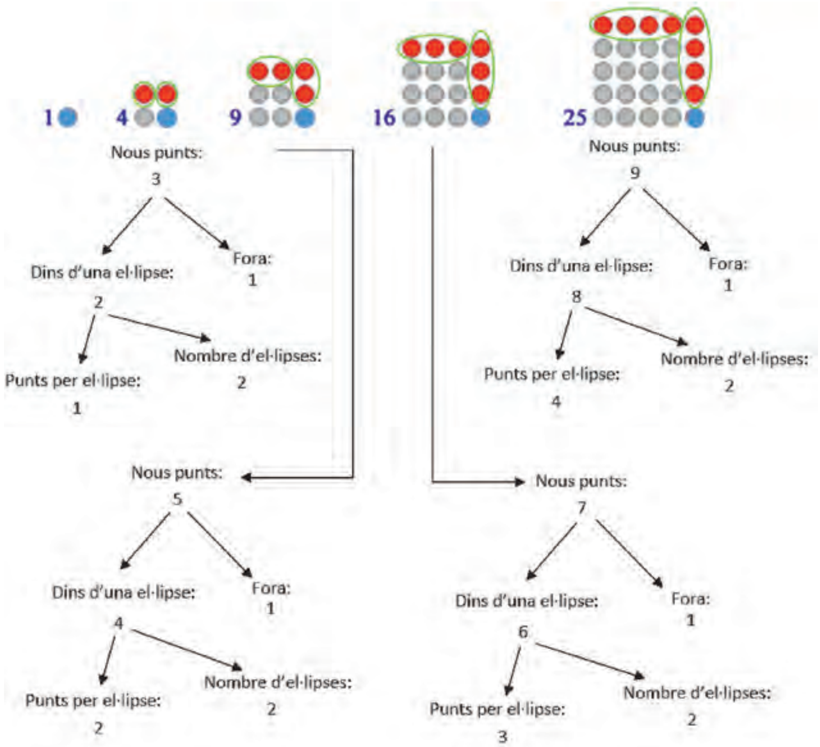
Per tant, podem aplicar la fórmula de la suma d'una progressió aritmètica:

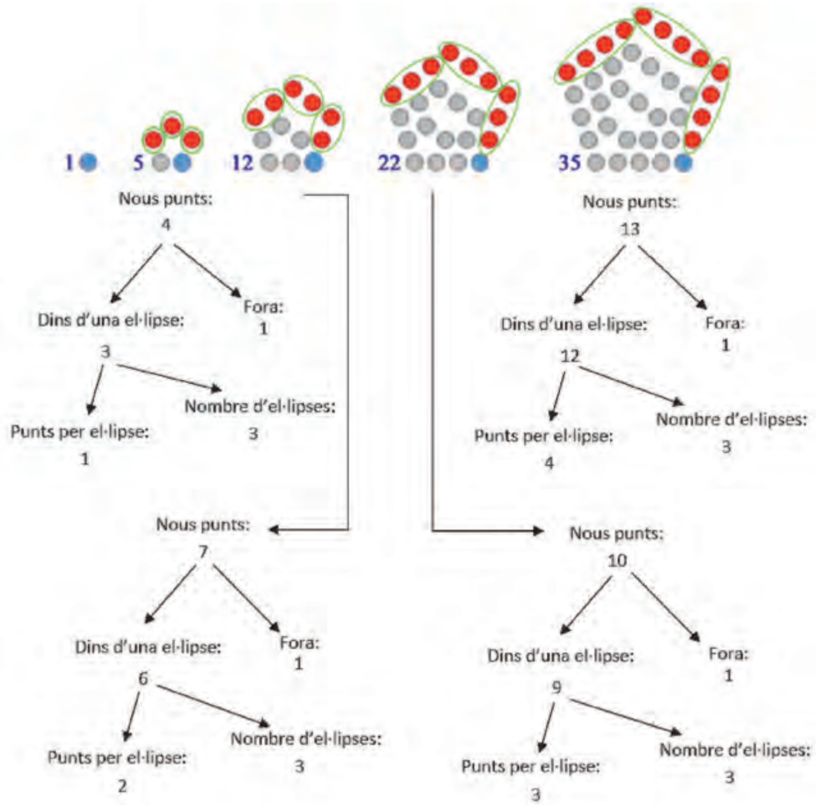
$$S_n = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2}$$

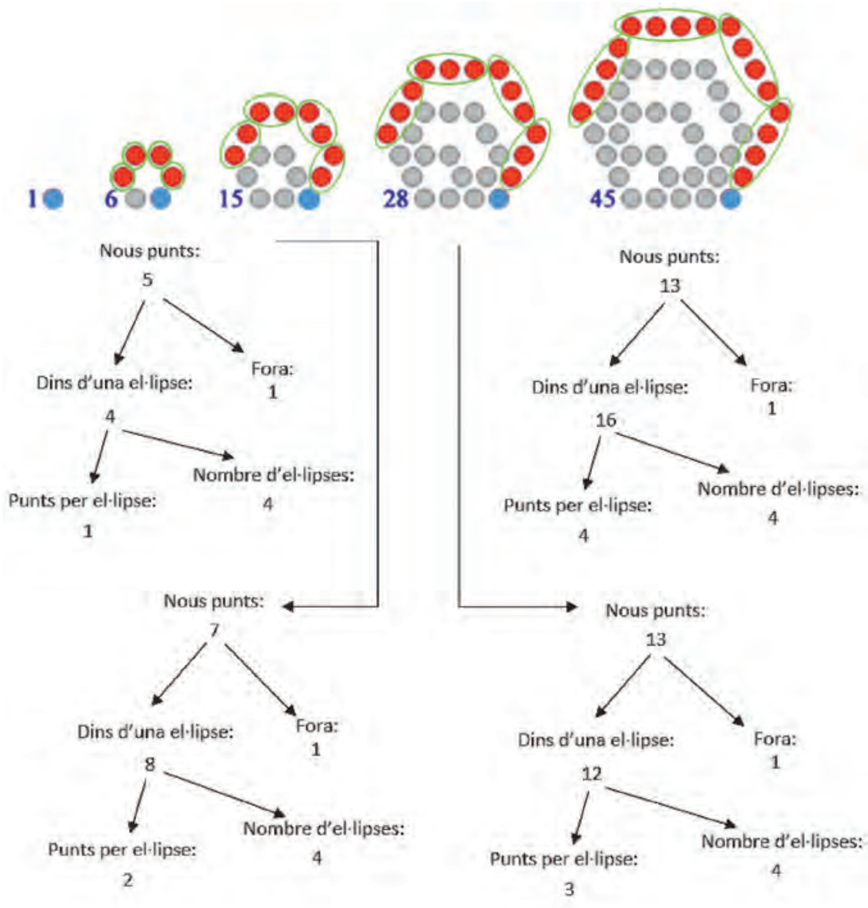
Sabem que a_1 és 1 i, com podem veure a la taula, n és l'ordre (o). Si s'aconsegueix trobar a_n, es podrà substituir i ja tindrem la fórmula que busquem.

Per trobar-lo cal fixar-se en el que es fa geomètricament.

En les representacions següents s'estudien els casos dels nombres poligonals quadrats, pentagonals i hexagonals. Es posa en gris el nombre poligonal d'un ordre menys i en altres colors, l'afegit en aquest ordre. Així mateix, es fan servir unes el·lipses imaginàries per fer el recompte de què s'ha afegit.


1
4
9
16
25
Nous punts:
3
Dins d'una el·lipse:
2
Fora:
1
Punts per el·lipse:
1
Nombre d'el·lipses:
2
Nous punts:
9
Dins d'una el·lipse:
8
Fora:
1
Punts per el·lipse:
4
Nombre d'el·lipses:
2
Nous punts:
5
Dins d'una el·lipse:
4
Fora:
1
Punts per el·lipse:
2
Nombre d'el·lipses:
2
Nous punts:
7
Dins d'una el·lipse:
6
Fora:
1
Punts per el·lipse:
3
Nombre d'el·lipses:
2


1
5
12
22
35
Nous punts:
4
Dins d'una el·lipse:
3
Fora:
1
Punts per el·lipse:
1
Nombre d'el·lipses:
3
Nous punts:
13
Dins d'una el·lipse:
12
Fora:
1
Punts per el·lipse:
4
Nombre d'el·lipses:
3
Nous punts:
7
Dins d'una el·lipse:
6
Fora:
1
Punts per el·lipse:
2
Nombre d'el·lipses:
3
Nous punts:
10
Dins d'una el·lipse:
9
Fora:
1
Punts per el·lipse:
3
Nombre d'el·lipses:
3



Com podem comprovar amb aquestes representacions, en cada pas s'afegeix un únic punt (nombre) al vèrtex inferior i diverses el·lipses imaginàries. El nombre d'aquestes és sempre el nombre de costats del polígon menys 2 i el nombre de punts dins seu és sempre l'ordre menys 1. Per tant:

$$a_n = 1 + (c - 2)\,(o - 1)$$

Si ara ho substituïm a la fórmula de la suma d'una progressió aritmètica, tenim:

$$n = \frac{(1 + [1 + (c - 2)\,(o - 1)])\,o}{2}.$$

I si desenvolupem aquesta fórmula, arribem al resultat següent:

$$n = o\,(2 - o) + \frac{co\,(o - 1)}{2}.$$

Variacions de la fórmula

En la fórmula anterior, l'ordre 1 és únicament un punt, que es podria considerar que no és un nombre poligonal. Per tant, en la primera variació es canviarà o per $u + 1$, on u representa l'ordre si no es té en compte un punt com a nombre poligonal:

$$n = [u + 1](2 - [u + 1]) + \frac{c[u + 1]([u + 1] - 1)}{2}$$

Si ho desenvolupem, arribarem al resultat següent:

$$n = 1 - u^2 + \frac{cu(u + 1)}{2}.$$

Una altra possible variació s'aconsegueix si es té en compte que no existeixen nombres poligonals amb un o dos costats. Llavors, en lloc de tenir en compte els costats es podria tenir en compte el tipus: els nombres triangulars es podrien considerar de tipus 1; els quadrats, de tipus 2; els pentagonals, de tipus 3, etcètera. Per tant, en la variació següent es canviarà c per $t + 2$, on t representa el tipus:

$$n = o(2 - o) + \frac{[t + 2]o(o - 1)}{2}.$$

Si ho desenvolupem, arribarem a:

$$n = o + \frac{(o - 1)}{2}.$$

En l'última variació es fan les dues anteriors a la vegada:

$$n = [u + 1](2 - [u + 1]) + \frac{[t + 2][u + 1]([u + 1] - 1)}{2}$$

Un cop desenvolupat, obtenim la fórmula següent:

$$n = u + 1 + \frac{tu(u + 1)}{2}$$

Conclusions

En començar aquest escrit tenia bastant clar com es podia arribar a aquesta fórmula mitjançant una successió geomètrica, però realment no hi veia la raó. Vaig pensar que dibuixar la representació geomètrica dels diferents nombres potser tindria alguna utilitat en aquest aspecte, ja que és així com s'haurien de buscar si no se sabés la fórmula. Fer-ho m'ha ajudat a mi mateix a comprendre que realment la fórmula no es compleix per aleatorietat, sinó que hi ha un perquè.

M'han sorprès bastant les diferents variacions. Resulta interessant veure que un canvi en el punt de vista que es té no comporta grans canvis. M'esperava que, en fer aquests canvis, resultessin fórmules més complicades que la que havia trobat inicialment, però realment tenen el mateix grau de complexitat.

M'agradaria veure si es podria aplicar el que he trobat a altres aspectes matemàtics o en alguna altra branca de la ciència. Per exemple, en química potser serviria per determinar el nombre d'àtoms que hi ha en algunes xarxes cristal·lines.